



## Задание 14

### Углы и расстояния в пространстве

#### Угол между скрещивающимися прямыми.

1. Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 1. Найдите угол между прямыми  $DM$  и  $CL$ , где  $M$  — середина ребра  $BC$ ,  $L$  — середина ребра  $AB$ .
2. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми  $SB$  и  $AD$ .
3. В пирамиде  $DABC$  прямые, содержащие ребра  $DC$  и  $AB$ , перпендикулярны.
  - а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку  $E$  — середину ребра  $DB$ , и параллельно  $DC$  и  $AB$ . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.
  - б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если  $DC = 24$ ,  $AB = 10$ .
4. Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $B_1 D$ .
5. Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AD$ .
6. На ребре  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $CE : EC_1 = 1 : 2$ . Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$ .
8. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между высотой тетраэдра  $DH$  и медианой  $BM$  боковой грани  $BCD$ .
9. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды  $PABCD$  равны между собой. Найдите угол между прямыми  $PH$  и  $BM$  если отрезок  $PH$  — высота данной пирамиды, точка  $M$  — середина ее бокового ребра  $AP$ .

## Угол между прямой и плоскостью

1. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостью  $A_1 B C$  и прямой  $B C_1$ , если  $AA_1 = 8$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 15$ .
2. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AA_1 = 4$ ,  $A_1 D_1 = 6$ ,  $C_1 D_1 = 6$ , найдите тангенс угла между плоскостью  $ADD_1$  и прямой  $EF$ , проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $B_1 C_1$ .
3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны рёбра:  $AB = 21\sqrt{7}$ ;  $SC = 29$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер  $AS$  и  $BC$ .
4. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AA_1 = 3$ ,  $AD = 8$ ,  $AB = 6$ , найдите угол между плоскостью  $ADD_1$  и прямой  $EF$ , проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $B_1 C_1$ .
5. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостью  $AA_1 C$  и прямой  $A_1 B$ , если  $AA_1 = 3$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 4$ .
6. Основанием прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 8$ . Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой  $A_1 B$  и плоскостью  $BCC_1$ .
7. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны  $AB = 2$ ,  $AD = AA_1 = 1$ . Найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .
8. Высота  $SO$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  составляет  $\frac{4}{5}$  от высоты  $SM$  боковой грани  $SAB$ . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.
9. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$  все рёбра равны 1. Найдите угол между прямой  $AC'$  и плоскостью  $ACD'$ .
10. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между медианой  $BM$  грани  $ABD$  и плоскостью  $BCD$ .

## Угол между плоскостями

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите косинус угла между плоскостями  $BA_1 C_1$  и  $BA_1 D_1$ .

2. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостями  $AB_1 D_1$  и  $ACD_1$ .
3. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 4, BC = 6, CC_1 = 4$ , найдите тангенс угла между плоскостями  $CDD_1$  и  $BDA_1$ .
4. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 6, BC = 6, CC_1 = 4$ , найдите тангенс угла между плоскостями  $ACD_1$  и  $A_1 B_1 C_1$ .
5. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SB$ . Найдите угол между плоскостями  $CMK$  и  $ABC$ , если  $SC = 6, BC = 4$ .
6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SC$ . Найдите угол между плоскостями  $BMK$  и  $ABC$ , если  $AB = 4, SC = 7$ .
7. Дана прямая призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом  $60^\circ$ . Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью  $AC_1 B$  и плоскостью  $ABD$ .
8. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADB_1$ .
9. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 2 : 1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .
10. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 1 : 2$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .
11. Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1 BC$  и плоскостью основания призмы.
12. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью  $SAD$  и плоскостью, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $BD$ .

## Расстояние от точки до прямой и до плоскости

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $BD_1$ .
2. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $AD_1$ .
3. Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ , у которого  $AB = 10$ ,  $BD = 12$ . Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$  до плоскости  $BDC_1$ .
4. Основанием прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Высота призмы равна 3. Найдите расстояние от середины ребра  $B_1 C_1$  до плоскости  $BCA_1$ .
5. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $2\sqrt{2}$ . Найдите расстояние от середины ребра  $B_1 C_1$  до прямой  $MT$ , где точки  $M$  и  $T$  — середины ребер  $AD$  и  $A_1 B_1$  соответственно.
6. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1 BT$ , где  $T$  — середина ребра  $AD$ .
7. Основанием прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ , боковая сторона которого равна  $6\sqrt{3}$ ; а угол  $ACB$  равен  $120^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1 C_1$ , если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.
8. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $SA$ .
9. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
10. Длины ребер  $AB$ ,  $AA_1$  и  $AD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BD_1$ .
11. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $D_1 E_1$ .

12. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра которой равны 1 найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $E_1 F_1$ .

13. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1 C_1$ .

14. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $B_1 C_1$ .

### Расстояние между прямыми и плоскостями

1. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$ , все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .

2. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , все рёбра основания которой равны  $2\sqrt{7}$ . Сечение, проходящее через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $M$  ребра  $B_1 C_1$  является квадратом. Найдите расстояние между прямыми  $A_1 B$  и  $AM$ .

### Сечения многогранников

1. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  угол  $ASB$  равен  $36^\circ$ . На ребре  $SC$  взята точка  $M$  так, что  $AM$  — биссектриса угла  $SAC$ . Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки  $A$ ,  $M$  и  $B$ , равна  $25\sqrt{3}$ . Найдите сторону основания.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины рёбер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

3. В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка  $N$  — середина ребра  $A_1 C_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $BAN$ .

б) Найдите периметр этого сечения.

4. Основанием прямой четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $3\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{7}$ . Точка  $K$  — середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

5. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с вершиной  $M$  высота равна 9, а боковые рёбра равны 15. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $BC$  параллельно прямой  $MB$ .

6. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , известны рёбра:  $AB = 3$ ,  $AD = 2$ ,  $AA_1 = 5$ . Точка  $O$  принадлежит ребру  $BB_1$  и делит его в отношении  $2 : 3$ , считая от вершины  $B$ . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $O$  и  $C_1$ .

7. Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью  $A_1 BE$ , если ребра куба равны 2.

8. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $A_1 C_1$ . Найдите его площадь.

9. В правильной четырёхугольной пирамиде  $MABCD$  с вершиной  $M$  стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $B$  и середину ребра  $MD$  параллельно прямой  $AC$ .

10. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания равна 11, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $K$  принадлежит ребру  $B_1 C_1$  и делит его в отношении  $8 : 3$ , считая от вершины  $B_1$ . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $D$  и  $K$ .

### Круглые тела: цилиндр, конус, шар

1. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

2. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно  $\sqrt{5}$ , а высота равна 1 вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

3. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
4. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
5. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.
6. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.
7. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.
- Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.
  - Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.
8. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.
9. Радиус основания конуса с вершиной  $P$  равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ .
10. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.